ETT AXIOMSYSTEM FÖR DEN EUKLIDISKA GEOMETRIEN.

AF

T. BRODÉN.

1. För ca. 20 år sedan (1890) uppställde och publicerade jag ett geometriskt axiomsystem[1]), som både genom den allmänna tendensen och genom öfverensstämmelse i vissa detaljer erbjuder beröringspunkter med senare framkomna axiomsystem, såsom det bekanta af *Hilbert* samt af *Veronese, Pieri, B. Levi* m. fl. Men min publikation blef helt naturligt föga bekant, dä den placerats i en svensk pedagogisk tidskrift. Jag skulle dock tro, att den förtjänat åtminstone något större uppmärksamhet, alldenstund det däri angifna axiomsystemet, trots alla beröringspunkter med senare uppställda system, dock i förhållande till dem intager en ganska bestämd särställning.

Då jag nu ber att för kongressen få redogöra för mitt system, bör jag på förhand nämna, att jag i vissa afseenden nu ger det en annan och, som jag tror, bättre form än den ursprungliga.

Den första grundtanken i det heia är den, att söka reducera de specifikt geometriske grundbegreppen till begreppet *punkt* samt ett begrepp, som innebär den minsta möjliga ansats till ett afståndsbegrepp. Och detta senare kan knappast blifva något annat än begreppet om *likhet i afstånd från en och samma punkt*, eller som vi för korthets skull vilja säga, *omedelbar afståndslikhet.* Och med denna utgångspunkt skola vi söka uppställa ett i möjligaste måtto enkelt, naturligt och homogent system af *axiom*, hvilka dessutom hvar för sig äro i möjligaste måtto empiriskt evidenta. Om betydelsen häraf, särskildt

[1]) Om geometriens principer. Pedagogisk tidsskrift. Halmstad 1890.

hvad angår den nämnda begreppsreduktionen, skall jag efteråt göra några korta anmärkningar, men öfvergår nu direkt till redogörelse för axiomsystemet i fråga.

2. Det odefinierade begreppet, att punkterna A och B hafva samma afstånd från en tredje punkt P, tecknas symboliskt

$$AP = BP \text{ [eller } PA = PB\text{]}.$$

Kan till detta begrepp omedelbart knytas något axiom? Ja, det följande, som må benämnas:

I. Fundamentalaxiom.

Axiom 1. Om $AP = BP$, $CP = BP$, så är $AP = CP$, eller i ord uttryckt: det gäller vid omedelbar afståndslikhet, att de som äro lika med ett och samma, äro sinsemellan lika.

Ett omedelbart *korollarium* häraf blir: de som äro lika med lika, äro sinsemellan lika.

3. Enligt sakens natur ligger det nu närmast till hands att söka vinna en *definition på det allmänna begreppet afståndslikhet*, $AB = CD$. En sådan skulle ju möjligen kunna formas såhär: $AB = CD$, om det existerar ett antal punkter P_1. $P_2 \cdots P_n$, sådanna att

$$AB = P_1B,\ BP_1 = P_2P_1,\ \cdots,\ P_nC = DC.$$

Ett sådant sätt att ställa saken skulle dock säkerligen medföra en betydlig komplikation. Men man kan i stället göra så, att man i första hand definierar afståndslikheten inom något lämpligt *partial-system*, där förhållandena äro jämförelsevis enkla, och därefter uppstiger till den fullt allmängiltiga definitionen. Detta kan ske genom följande system af

II. Axiom, som möjliggöra det allmänna begreppet afståndslikhet.

Axiom 2. Orten för en punkt P, sådan att $PA = PB$ [då A och B äro två gifna punkter], utgör mer än *en* punkt.

Definition 1. Denna ort (= detta punktsystem) benämnas ett *plan*[1]).

[1]) Denna definition är, som bekant, af gammalt datum. Den föreslogs bl. a. redan af Leibnitz. Likaså den motsvarande för räta linien.

Axiom 3. Motsvarande mängd inom ett plan utgör mer än en punkt.

Definition 2. Denna punktmängd benämnes en *rät linie.*

Axiom 4. Det motsvarande inom en rät linie utgöres af *en enda punkt*, som är skiljd från både A och B (hvadan alltså en rät linie består af minst tre punkter).

Definition 3. Denna punkt kallas *midtpunkten* till A och B.

Anm. I och genom Ax. 3 och Def. 2 är tydligen förutsatt, att hvarje rät linie ingår som beståndsdel i åtminstone något plan.

Försökom nu definiera det allmänna begreppet afståndslikhet i fråga om punkter *på en rät linie.* Man skulle för detta ändamål nog kunna använda det ofvannämda interpolationsförfarandet i specialicerad form, nämligen så, att de interpolerade punkterna (P_1, P_2 ....) alla utom en förlades på linien (blott vid speciella lägen för A, B, C, D skulle de alla kunna tillhöra linien). Men ett sådant förfarande skulle, om också möjligt och kanske ur vissa synpunkter intressant, näppeligen vara gagneligt för enkeltheten och elegansen i hela axiomsystemet. Men man kan i stället forma definitionen så, att vid densamma endast punkter *på* linien komma i betraktande, nämligen helt enkelt på följande sätt:

Definition 4. På en rät linie är $AB = CD$, om paren A, D och B, C eller A, C och B, D hafva *samma midtpunkt.*

Härtill fogas genast:

Axiom 5. På en rät linie äro de afstånd lika, som äro lika med ett och samma.

Till detta begrepp skola vi nu söka återföra det fullt allmänna begreppet afståndslikhet. Härför erfordras tvänne nya axiom.

Axiom 6. Genom två punkter hvilka som hälst går alltid åtminstone någon rät linie (och således ochså något plan, se anm. efter axiom 4).

Axiom 7. Om P är en punkt på en rät linie, och A en punkt utanför linien, så finnes alltid åtminstone någon punkt B på linien, sådan att $BP = AP$.

Nu kan definitionen i fråga formuleras på följande sätt:

Definition 5. Två punktpar A, B och C, D vare gifna. Man förbinde en punkt i det ena paret med en punkt i det andra, t. ex. A och C genom en rät linie (ax. 6). På linien tagas sedan två punkter H och K så att $HA = BA$, $KC = DC$ (ax. 7). Om då (enl. def. 4) $HA = KC$, så är äfven $AB = CD$,

Såsom axiom måste äfven nu tillfogas:

Axiom 8. Det gäller fullt allmänt, att de afstånd, som äro lika med ett och samma, äro sinsamellan lika.

Af def. 4 och ax. 8 framgår såsom

Korollarium Om vid gifna punktpar A, B; C, D det i def. 5 angifna förhållandet inträffar, då den förbindande linien väljas på ett af de 4 möjliga sätten och vid ett bestämdt val af punkterna H och K, så inträffar detsamma vid hvarje annat val af hjälplinien och af punkterna H, K.

---

4. Härmed är det fullständiga begreppet afståndslikhet färdigbildadt. Och därmed är i själfva verket en ganska betydlig del af axiomsystemet färdigt. De axiom, som ytterligare behöfvas, äro af mycket enkel natur och utgöra svar på vissa frågor, som nu af sig själfva framställa sig. Man kan lämpligen dela dem i grupper på följande sätt.

III. Axiom för individualisering af rät linie och plan

(utgörande en del af Hilberts »Axiome der Verknüpfung«).

Axiom 9. Genom två (olika) punkter går aldrig mer än *en* rät linie (men enl. ax. 6 alltid en).

Axiom 10. Den räta linie, som går genom två punkter i ett plan, ligger helt och hållet i planet.

Axiom 11. Genom tre punkter, som icke ligga i en rät linie, gar alltid ett men endast ett plan.

IV. Symmetriaxiom.

Under denna benämning kan man sammanfatta tvänne axiom, som i viss mening innebära en omvändning af de genom axiomen 2, 3, 4 och definitionerna 1, 2 fastställda förhållandena, och som kunna formuleras på följande sätt.

Axiom 12. Hvarje punkt M på en rät linie bestämmer en entydig symmetrisk (»involutorisk«) motsvarighet, vid hvilken motsvariga afstånd äro lika, och M är den enda självmotsvariga punkten.

Anm. På grund af def. 4 är detta fullkomligt likbetydande med följande: om M och A äro två godtyckliga punkter på en rät linie,

så finnes det en men endast en punkt B, sådan, att M är midtpunkt till A och B.

Axiom 13. Hvarje rät linie i ett plan bestämmer en entydig involutorisk punktmotsvarighet, vid hvilken motsvariga afstånd äro lika och liniens alla punkter men inga andra äro självmotsvariga.

Anm. 1. Detta innebär följande: om i ett plan L är en godtycklig rät linie och A en godtycklig punkt utanför linien, så finnes det en och endast en punkt B i planet, sådan att $BP = AP$, om P är en godtycklig punkt på L. Men dette innebär ânnu icke (åtminstone icke omedelbart), att $AC = BD$, om B i denne mening motsvarar A, och D i samma mening motsvarar C.

Anm. 2. En analog sats gäller äfven för planet och hela rymden. Men den bör ej uppställas som axiom, då den följer af våra öfriga axiom.

V. Kontinuitetsaxiom.

Vi hafva att eftersträfva ett medel att klassificera de olika punkterna i rummet, och närmast på en rât linie genom deras olika relationer til fasta punkter. *En* fast punkt är hävid icke tillräcklig: man kommer då blott till den nyssnämda symmetrien. Annorlunda om man utgår från *två* fasta punkter, och därigenom kommer i tillfälle att använda flere olika symmetrier. Låt O och P_1 vara två punkter på en rät linie. Då är enl. ax. 12 P_1 midtpunkt till O och en bestämd punkt P_2, vidare P_2 midtpunkt till P_1 och P_3 o. s. v, Den härmed angifna proceduren må korteligen kallas »successiv symmetribildning« eller, med vanligare uttryckssätt, »successivt afsättande af lika stora stycken«. Två fall äro nu tänkbara: denna procedur leder förr eller senare tillbaka till utgångspunkten O, eller icke. Vi konstatera nu det senare, d, v. s. uppställa axiomet:

Axiom 14. Vid »successiv afsättning af lika stora stycken« återkommer man aldrig till utgångspunkten (intet P_n sammanfaller med O).

Anm. Detta blir den form, hvari det s. k. *Archimediska axiomet* nu kommer att uppträda. Härvid måste anmärkas, att vi här tydligen komma i kontakt med den något omtvistade frågan om de hela talens begrepp. Axiomets ofvanstående formulering ansluter sig till den uppfattning af talbegreppet, som grunder sig på principen »från n till $n + 1$«. Och jag stannar åtm. för tillfället vid denna formulering, med reservation för möjligheten att ordna saken på annat sätt[1]). —

[1]) Den formulering, som förekommer i min skrift från 1890, finner jag numera vara otillfredsställande.

Låter man emellertid punkten O betecknas med 0, punkten P_1 med 1, kommer hela det erhållna systemet O, P_1, P_2 · · · · att motsvara den positiva heltalsserien, och detta på sådant sätt, att två punktpar, hvilkas motsvarande tal hafva lika differenser, också hafva lika inbördes afstånd. Genom att ersätta P_1 med dess i afs. på O symmetriska bildpunkt, erhåller man ett nytt punktsystem, motsvarande den negativa heltalsserien. Medelst axiom 4 kommer man sedan till punkter motsvarande ändliga dualbråk (där talet 2 spelar samma rol, som talet 10 ved decimalbråken), med samma öfverensstämmelse mellan afståndslikhet och likhet i taldifferens, som nyss.

De hittills uppställda axiomen jämte nedanstående axiom 16 äro tillräckliga för grundläggning af en »euklidisk« geometri. Men icke förty kvarstår en viss obestämdhet. Systemet kan vara i modern mening kontinuerligt, men behöfver icke vara det: vid gifven enhet och gifvet rätvinkligt koordinatsystem kunna punktmotsvarigheter saknas till andra tal än de nämnda dualtalen (incl. de hela talen) och vissa af kvadratrotsform. För att etablera den värkliga kontinuiteten, måste men tillfoga ännu ett axiom, som man med *Hilbert* lämpligen kan kalla »fullständighetsaxiom«. Detsamma kan formuleras på olika sätt[1]). Vi anföra icke här någon bestämd formulering, utan anteckna blott såsom

Axiom 15. Fullständighetsaxiom.

VI. Parallelaxiom.

Ännu erfordras ett axiom, motsvarande det euklidiska s. k. parallelaxiomet. Med det snäfva begreppsförråd, hvarmed vi nu försett oss, stå icke många olika formuleringar af detta axiom till buds. Vi välja den följande, som, då den direkt innehållar afståndsrelationer, snabbast leder till afståndsformlerna (1) och (2) och möjligen äfven ur andra synpunkter har sina företräden: om i ett plan två punkter A och B ligga symmetriskt til en rät linie, så bilda öfriga till samma linie hörande symmetriska par med samma inbördes afstånd som A och B två räta linier, eller korteligen (med användning af uttrycket »axial symmetri« för den i axiom 13 fastställda symmetriska motsvarigheten):

Axiom 16. Vid den axiala symmetrien i ett plan bilda ekvidistanta symmetriska par två räta linier.

---

[1]) I min skrift af 1890 finnes en dylik formulering angifven. *Hilbert* har först i andra upplagen af »Grundlagen etc.« upptagit ett dylikt axiom.

5. Det skall nu visas, at de uppställda axiomen äro tillräckliga för erhållande af den inom den euklidiska geometrien gällande afståndsformeln och därmed också tillräckliga för denna geometris grundläggning.

Vi hålla oss först i *planet*. Mot en rät linie svarar vid den axiala symmetrien tydligen en annan rät linie, som råkar den förstnämnda på symmetriaxeln, ifall linierna råkas alls. Och en rät linie, som förenar två symmetriskt hophörande punkter, motsvarar sig själf. Vi säga, att den är *vinkelrät* mot axeln. Tydligen går genom en punkt utanför axeln *en* men *endast en* mot densamma vinkelrät linie (ax. 6, 9 och 10). Detsamma gäller äfven om en punkt *på* axeln. Men detta behöfver bevisas.

Vi bevisa först, att egenskapen »vinkelrät« är reciprok, så att om en linie (B) är vinkelrät mot en annan (A) — $B \perp A$ —, äfven A är vinkelrät mot B. B har tydligen en gemensam punkt (»skärningspunkt«) med A, nämligen midtpunkten till två på B liggande, med afseende på A symmetriska punkter. Tag två godtyckliga sådana P och P', och låt midtpunkten heta O. Tag vidare på A de två punkter R och S, för hvilka $RO = SO = PO = P'O$. Punkterna P och R bestämma en axial symmetri, hvars axel, då $PO = RO$, går genom O. Likaså bestämma S och P en symmetri med axel genom O. Vid den förstnämnda symmetrien svarar P mot R, och alltså, då O är självmotsvarigt, linien B mot linien A, samt P' mot S. Vid den senare svarar S mot P, A mot B. Sammansättar man bägge, fås en afståndsbibehållande motsvarighet, vid hvilken linierna A och B äro självmotsvariga, men så att endast punkten O motsvarar sig själf, under det P svarer mot P', R mot S, och således på hvardera linien två motsvariga punkter alltid ligga symmetriskt till O. Sammansättas slutligen denna motsvarighet med den ursprungliga symmetrien, hvars axel var A, framgår tydligen en afståndsbibehållande motsvarighet, vid hvilken hvarje punkt af linien B är självmotsvarig, samt linien A sammanbinder hophörande punkter. Alltså är $A \perp B$.

Häraf följer nu lätt, att genom hvarje punkt (O) på en rät linie (A) går en mot henne vinkelrät linie. Ty symmetriaxeln (B) till två godtyckliga, med afseende på O symmetriskt belägna punkter af linien A går genom O, och A är vinkelrät mot B, alltså äfven B mot A. Men vidare kan genom O icke gå mer än en mot A vinkelrät linie. Ty funnes flere, skulle A vara vinkelrät mot dem alla, och således två till O symmetriska A-punkter motsvaras af flere symmetriaxler (emot ax. 3 och def. 2).

Härmed är möjligheten af »rätvinklige koordinater« gifven. Sedan man valt två axlar och en längdenhet, kommer mot hvarje punkt i planet att svara två reella tal x och y. Detta inses utan vidare. Att omvändt, vid förutsättning af fullständighetsaxiomet, mot hvarje talpar svarar en bestämd punkt, följer däraf, att två rätte linier, som äro vinkelräta mot hvar sin af axlarna, då alltid hafva en gemensam punkt, hvilket åter inses på följande sätt. Betraktom två räta linier, L och L', som med afseende på x-axeln utgöra en ort för ekvidistanta symmetriska punkter. Dessa linier måste råka y-axeln, emedan därpå måste finnas två till O symmetriska punkter med samma inbördes afstånd som två uppgifna punkter, hvilka som hälst. L och L' måste också vara vinkelrätta mot y axeln. Ty deras egenskap att i förhållande til x-axeln utgöra en ort för ekvidistanta symmetriska punktpar rubbas tydligen ej vid den symmetriska transformation, hvars axel är y-axeln. Och då L och L' vid denna icke kunna motsvara hvarandra eftersom de skära y-axeln i olika punkter, så måste hvardera vara självmotsvarig, d. v. s. vinkelrät mot y-axeln. Men y-axeln är en godtycklig linie, vinkelrät mot x-axeln. Alltså: om två linier med afseende på en tredje (A) utgöra ort för ekvidistanta symmetriska punkter, så äro de vinkelräta mot hvarje linie, som är vinkelrät mot A. Omvändt gäller det också, att om en linie är vinkelrät mot en annan, och denna åter mot en tredje (A), så bildar den förstnämda jämte dess i afs. på A symmetriskt motsvariga i förhållande till A en ort för ekvidistanta symmetriska punktpar. Detta visas så lätt, att vi ej utföra beviset. Och då, såsom nyss påpekades, en linie, som tillhör en dylik ort, måste råka hvarje mot symmetriaxeln vinkelrät linie, gäller det tydligen, att två räta linier, som äro vilkelräta mot hvar sin af två inbördes vinkelräta linier, hafva en gemensam punkt. Hvilket ju nu skulle bevisas.

Begreppet *parallelism* kan nu, om man så vill, definieras så, att två linier äro parallela, om de äro vinkelräta mot en och samma.

På ett så enkelt sätt, att det ej torde behöfva närmare utföras, kommer man nu till begreppet om planets »förskjutning på sig själf« längs x-axeln eller y-axeln, analytiskt represenderad genom relationen $x = x_1 + h$ resp. $y = y_1 + k$, liksom äfven begreppet flyttning af origo.

För att nu komma till »ekvationen för en rät linie«, anmärka vi först att två punkter (x_1, y_1) och $(-x_1, -y_1)$ ligga i rät linie med origo (O). Detta inses sålunda. Punkterna (x_1, y_1) och $(x_1, -y_1)$, kortel. P och P', ligga symmetriskt till x-axeln. Detta gäller därför äfven om linierna OP och OP'. De punkter, R och R', som på dessa

linier ligga symmetriskt till P resp. P', med afs. på O (så att $OR =$ $= OP = OP' = OR'$) äro därför också symmetriska til x-axeln. Men P och R' resp. P' och R motsvara hvarandra också med afseende på en viss linie genom O (annan än x-axeln) som symmetriaxel. I förhållande till samma linie bilda äfven midtpunkterna till P och P' resp. R' och R ett symmetriskt par. Men dessa midtpunkter tillhöra x-axeln. Denna är alltså vinkelrät mot den nämnda symmetriaxeln, som följaktligen sammanfaller med y-axeln. Punkterna R och R' äro således $(-x_1, -y_1)$ och $(-x_1, y_1)$. Detta är likbetydande med, att (x_1, y_1) och $(-x_1, -y_1)$ ligga i rät linie med O.

Vi kunna nu uppställa ekvationen för OP. Origo må flyttas till R. Koordinaterna för O blifva då (x_1, y_1), för P däremot $2x_1, 2y_1$. Dessa båda punkters koordinater äro alltså proportionella. Man finner genom ett enkelt resonnemang, att detsamma gäller för alla liniepunkter, hvilkas abscissor hafva formen $\pm m \cdot \frac{x_1}{2^n}$ (m, n hela tal): förhållandet mellan y och x är konstant, d. v. s. liniens ekvation är

$$y = \frac{y_1}{x_1} x,$$

åtm. om blott nämda abscissor afses. Och samma ekv. gäller i självfva värket om liniens alla punkter, ehuru vi för korthets skull utelämna det enkla beviset härför. Ekvationen för en linie, som ej går genom origo, fås genom koordinattransformation.

För att nu komma till afståndsformeln, observera vi först, att på en rät linie genom O icke blott y-värdena, utan äfven — blott på tecknet när — afstånden från O (»radii vectores«) äro proportionella mot x-värdena. Detta följer enkelt däraf, att $OP = OR$. Att härleda afståndsformeln blir samma sak, som att bestämma det konstanta förhållandet mellan radius vector (OP) och $|x_1|$ såsom funktion af x_1 och y_1. För detta ändamål behöfver man känna ekv. för en rät linie, som är vinkelrät mot en gifven linie och går genom en gifven punkt, låt oss säga den, som går genom O och är $\perp OP$. Den kan åter fås såhär. Tag först den symmetri, som öfverför OX (x-axelns positiva del) i OY (y-axelns pos. del), och använd sedan OY som symmetriaxel. Den så sammansatta transformationen (som kan benämnas den »vridning«, som öfverför OX i OY) är en afståndsbibehållande osymmetrisk transformation, som tydligtvis öfverför OP i (halfdelen af) den mot OP vinkelräta linien OQ. Ekvationen för OQ är därför tydligtvis antingen $yy_1 = x_1 x$ eller $yy_1 = -x_1 x$. Men den förstnämda ekv.

9*

gäller för den linie, till hvilken OP öfvergår vid den axiala symmetri, som öfverför OX i OY. Denna linie kan icke sammanfalla med OQ. Alltså återstår för OQ ekv. $yy_1 = -x_1x$. Drag nu genom P linien $\perp OP$. Dess ekv. blir

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1).$$

Sätt här $y = 0$, så fås abscissan för liniens skäringspunkt T med x-axeln: om vi tänka oss $x_1 > 0$, blir

$$OT = \frac{x_1^2 + y_1^2}{x_1}.$$

Betrakta nu återigen den symmetri, som öfverför OX i OP. Vid densamma må P (på OP) motsvaras af P_1 (på OX), och T (på OX) af T_1 (på OP), hvarvid naturligtvis $OP = OP_1$, $OT = OT_1$. Linien P_1T_1 motsvarar linien PT och är alltså $\perp OX$ (eftersom $PT \perp OP$. Vi ha alltså:

$$\frac{OP}{x_1} = \frac{OT_1}{OP_1} = \frac{OT}{OP} = \frac{x_1^2 + y_1^2}{x_1 \cdot OP},$$

hvarur

$$OP = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}.$$

Genom koordinattransformation fås den allmänna afståndsformeln:

(1) $$r^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$ [1]

Detta i planet. Den i rymden gällande formeln

(2) $$r^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

kan man sedan få fram genom en deduktion, som i väsentlig mån kan formas efter de 19 första propositionerna i Euklides' elfte bok.

I formeln (2) ligger hela den euklidiska (tredimensionala) geometrien innesluten, i den meningen, att allting *kan* därur härledas, sedan man på lämpligt sätt *definierat*, d. v. s. till afståndsförhållanden återfört de begrepp, med hvilka geometrien för öfrigt rör sig, såsom begreppen vinkel, ytinnehåll m. fl. Huru detta lämpligast bör ske, skall här icke afhandlas [2].

---

[1]) Hela denna deduktion (som vid det muntliga kongressföredraget blott i största korthet antyddes) återfinnes i föga skiljaktig form i min uppsats från 1890.

[2]) Jfr. »Om geometriens principer«, p. 20—22.

6. Det uppställda systemet är således *tillräckligt* för erhållande af den euklidiska geometrien. Ojämförligt mer komplicerad är — vid detta system, liksom alltid — den omvända frågan, om alla axiomen äro såsom sådana *nödvändiga*, d. v. s. af hvarandra oberoende. Här skall i detta afseende blott följande specialfråga beröras.

Vi hålla oss i *planet*, med bortseende från de axiom, som blott angå rymden. Finnes det något system, som uppfyller alla de plana axiomen utom 14 och 15? Och finnes det rentaf något *ändligt* system af denna beskaffenhet?

Ett sådant kan fås såhär [2]). Vi taga 9 punkter och ordna dem såsom i en determinant:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Och vi säga vidare, att afståndet mellan två punkter är $= a$, om de ligga på samma horisontal- eller vertikalrad, men $= b$, om de icke göra det. Vi säga dessutom, att tre punkter bilda en rät linie, om de *antingen* utgöra en horisontal- resp. en vertikalrad *eller* motsvara ett element i determinanten. Man får då 12 »räta linier«. Genom två punkter går alltid *en* linie. Tag en bestämd sådan. Då finnas 6 punkter, som icke ligga på linien. Dessa ordna sig i 3 par, som i ofvan angifven mening ligga symmetriskt till linien, enligt följande schema:

Rät linie	Symm. par	Rät linie	Symm. par
1 2 3	47, 58, 69	1 5 9	24, 37, 68
4 5 6	17, 28, 39	3 5 7	26, 19, 48
7 8 9	14, 25, 36	2 4 9	15, 38, 76
1 4 7	23, 56, 89	2 6 7	35, 18. 94
2 5 8	13, 46, 79	6 8 1	95, 27, 43
3 6 9	12, 45, 78	8 4 3	75, 16, 29

Hvart och ett af de 36 punktpar, som öfverhufvud kunna bildas bland de 9, förekommer här en och endast en gång: d. v. s. två punkter bestämma alltid entydigt en symmetriaxel. Vidare ser man lätt, att vid hvarje axel de tre symmetriska paren å ena sidan hafva samma inbör-

[1]) Denna sak förekom icke i min tidligare skrift.

des afstånd, å andra sidan fördela sig på två räta linier (jfr. parallel-axiomet). Äfven begreppet vinkelräthet kan definieras såsom ofvan (så blir t. ex. 249 ⊥ 843).

Man skulle således här kunna tala om ett ändligt system, som vore »euklidiskt« (ax. 16 gäller), men icke »arkimediskt« (ax. 14 gäller tydl. icke). Att märka är dock härvid, att tydligen ej häller ax. 7 gäller, såvida man ej förutsätter $b = a$, hvilket symboliskt uttrycker, att alla afstånd äro lika. Men antages detta, gällar hela vårt plana axiom-system (ehuru vissa axiom och likaså def. 4 bli såsom ax. resp. def. öfverflödiga)[1].

Fallet är i och för sig tämligen trivialt. Men dess blotta möjlighet kan föranleda följande anmärkning. Som bekant har *Hilbert* angifvit ett oändligt system, där alla hans axiom utom kontinuitetsaxiomen gälla. Och man kan äfven härvid stanna inom planet. Det kan nu frågas: satisfierar vårt niopunktsystem (med $a = b$) de Hilbert'ska plana axiomen, utom kontinuitetsaxiomen? Detta är *icke* händelsen. Ty dessa Hilbert'ska axiom ha redan till konsekvens, att en rät linie innehåller oändligt många punkter. Och ett specielt axiom, som står i direkt strid med 9-punktsystemet, återfinnes bland H.s »Axiome der Anordnung«, som röra sig om begreppet »mellan«, hvilket hos H. spelar rollen af grundbegrepp[2]: af tre punkter på en rät linie ligger alltid en bestämd mellan de båda andra. Alltså åtminstone om man stannar inom planimetrien, innehålla de Hilbert'ska axiom, som återstå, sedan kontinuitetsaxiomen frånräknats, någonting mera än våra mot-svarande axiom.

7. Beträffande grundtanken att reducera de geometriske begreppen till de två: punkt och »omedelbar afståndslikhet«, hafva *Veronese* och *Pieri* haft yttranden i riktning af möjligheten häraf, men ingen af dem har, så vidt jag vet, genomfört denna tanke. Saken kan f. ö. sägas framskymta redan hos Euklides (I. 1—3).

Jämte de två specifikt geometriske begreppen förutsätter vårt system naturligtvis äfven vissa grundbegrepp af allmänt logisk eller aritmetisk natur. Det skulle kanske ur mer än en synpunkt vara af intresse att närmare tillse, hvilken olika ställning olika aritmetiska begrepp intaga till vårt system: somliga äro tydligen abstrakta grundbegrepp jämte de

---

[1]) I förbigående anmärkes: om de 9 numren på lämpligt sätt fördelas på en allmän tredjegradskurvas inflexionspunkter, komma 3 punkter. »bilda en rät linie«, att värk-ligen ligga på en reell imaginär rät linie. Men detta är f. n. utan någon betydelse.

[2]) Vid vårt sätt att ordna axiomen, kan begreppet »mellan« först så småningom in-komma: först fastställes, att midtpunkten till A och B ligger mellan A och B o. s. v.

rent geometriske, andra återigen inkomma genom förmedling af dessa och vinna därigenom sin konkreta geometriska betydelse.

Till förebyggande af möjligt missförstånd, må uttryckligen framhållas, att det icke är min mening beteckna såsom ett logiskt fel att använda flere »grundbegrepp« än nödigt: man må nyttja huru många som hälst, blott sammanhanget mellan dem fastställes genom vederbörliga axiom. Men å andra sidan kan ett axiomsystem, där axiomen, på sätt som ofvan skett blifvit så att säga »renodlade«, hafva sin särskilda betydelse med afseende på utredningen af geometriens fundament. Och denna betydelse kan tilläfventyrs vara äfven af mera allmänt mängdteoretisk eller t. o. m. kunskapsteoretisk natur. Härom skall jag dock icke här närmare yttra mig. Icke häller skall jag nu ingå på några betraktelser öfver det ofvan anförda systemets relationer till *K. Th. Vahlen's* »abstrakta geometri« (Leipzig, Teubner 1905), där förf. vill reducera de specifikt geometriske grundbegreppen till det enda begreppet punkt.

Beträffande lämpligheten af att söka tillämpa den moderna geometriska kriticismen inom det rent *pedagogiska* området, är jag för min del ganska skeptisk. Men vill man öfverhufvud något dylikt, kan måhända äfven det här gifna axiomsystemet förtjäna att i någon mån komma i betraktande.

I det hela torde det kunna sägas, att detta system är ett bland de så att säga stramaste, mest rakt på saken gående, som öfverhufvud kunna tänkas.